

ANEXO I

I. FORMULACIÓN PARA LA LEY DE PENSIONES (puede haber Derechohabientes en todos los Grupos)

A. CUANDO EL TITULAR DE LA PENSIÓN ES UN JUBILADO

$$Vw(x) = 13 * a^{(12)}(x) + \sum_{t=0}^{\infty} \{d(x+t)/l(x)\} * v^{t+1} * [\vec{a}(t)]$$

Se utiliza el factor (13) teniendo en cuenta que en un año se deben reconocer trece (13) mesadas, según lo dispone el Decreto 24469/97 en su artículo 2

La aproximación inherente a la utilización del factor (13) en la formulación implica asumir que el flujo de contratos a lo largo de 12 meses es uniforme (la mesada adicional se causa en diciembre).

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) = & [G1y](t) + [G1z1](t), [G1z2](t) \\ & + [G2a](t) + [G2b](t) + [G2c](t) + [G2d](t) \\ & + [G3e](t) + [G3f](t) \end{aligned}$$

Del Grupo(1) corresponde:

- [G1y](t) Al cónyuge supérstite con derecho a renta vitalicia
[G1z1](t) Al hijo inválido de menor edad con derecho a renta vitalicia
[G1z2](t) Al hijo de menor edad con derecho a renta temporal

Del Grupo(2) corresponde:

- [G2a](t) Al Padre con derecho a renta vitalicia
[G2b](t) A la Madre con derecho a renta vitalicia
[G2c](t) Al hermano inválido de menor edad con derecho a renta vitalicia
[G2d](t) Al hermano de menor edad con derecho a renta temporal

Del Grupo(3) corresponde:

- [G3e](t) Al hombre de menor edad con derecho a renta vitalicia
[G3f](t) A la mujer de menor edad con derecho a renta vitalicia

A.1 DERECHOHABIENTES DEL GRUPO (1)

En la presente formulación se efectúa el cálculo para los siguientes derechohabientes:

- a. El cónyuge
- b. El hijo inválido de menor edad
- c. El hijo no inválido de menor edad.

Formulación para el cónyuge:

$$[G1y](t) = Fpy * 13 * \{l(y + t + 1) / l(y)\} * \ddot{a}^{(12)}(y + t + 1) \quad \{t=0,1,2, \dots\}$$

Para el hijo inválido de menor edad:

$$[G1z1](t) = Fpz1 * 13 * \{l(z1 + t + 1) / l(y)\} * Q(z1 + t + 1) * \ddot{a}^{(12)}(z1 + t + 1) \quad \{t = 0,1,2 \dots\}$$

Para el hijo no inválido de menor edad:

$$[G1z2](t) = Fpz2 * 13 * Q(z2 + t + 1) * \ddot{a}^{(12)}(e_{z2+t+1}^o) \quad \{t = 0,1,2 \dots\}$$

$$Q(y1a + t + 1) = 1 - \{l(y1a + t + 1) / l(y1a)\}$$

$\ddot{a}^{(12)}(\hat{e}(x))$ es una renta cierta para Derechohabientes temporales

$$\text{Para Derechohabientes temporales: } e_x^o = 25 - x$$

- Factores para el Cónyuge:

Fpy = 0.0 cuando no hay cónyuge

Fpy = 0.6 cuando hay cónyuge y solamente un (1) hijo

Fpy = 0.8 cuando solamente hay cónyuge

Fpy = 0.5 cuando hay más de un hijo

Fpy = 0.8 cuando en el tiempo, el valor $[G1z1](t)$ y $[G1z2](t)$ de los hijos es cero

- Factores para el hijo inválido.

Fpz1 = 0.0 cuando no hay hijo inválido

Fpz1 = 0.2 cuando hay cónyuge

Fpz1 = 1.0 cuando no hay cónyuge

Fpz1 = 0.5/n .. cuando hay cónyuge y n hijos

- Factores para el hijo válido.

Fpz2 = 0.0 cuando no hay hijo válido (no inválido)

Fpz2 = 0.2 cuando hay cónyuge

Fpz2 = 1.0 cuando no hay cónyuge

Fpz2 = 0.5/n .. cuando hay cónyuge y n hijos

OBSERVACIONES:

- a. Solamente para el primer grado el factor (Fp) puede variar con el tiempo.
- b. Cuando no exista un Derechohabiente, el factor (Fp) correspondiente debe ser cero (0).
- c. Cuando en ningún Grupo se haya relacionado un Derechohabiente, para efectos del cálculo se debe incluir en el Grupo(1) un Derechohabiente de quince (15) años de edad, con derecho a una renta temporal.

NOTA: El Decreto reglamentario 24469 de 1997 establece en su artículo 16 ordinal (f) que “Si el contrato no incluyera a los Derechohabientes de Primer Grado y éstos se presentasen dentro de los 36 meses establecidos en este reglamento, la AFP o Entidad Aseguradora deberá recalcular la Pensión para incluir a estos Derechohabientes.”

A.2 DERECHOHABIENTES DE LOS GRUPOS (2) Y (3)

En la presente formulación se efectúa el cálculo para los siguientes Derechohabientes del Grupo (2):

- a. El padre
- b. La madre
- c. El hermano inválido de menor edad
- d. El hermano no inválido de menor edad

En la presente formulación se efectúa el cálculo para los siguientes Derechohabientes del Grupo(3):

- e. El Beneficiario de renta vitalicia, hombre, de menor edad
- f. El Beneficiario de renta vitalicia, mujer, de menor edad

Expresión general:

$$Vw(x) = 13 * a^{(12)}(x) + \sum_{t=0} \{d(x+t)/I(x)\} * v^{t+1} * [\tilde{a}(t)]$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}(t) = & [G1a](t) + \text{Máximo}\{[G1b](t), [G1c](t)\} \\ & + [G2a](t) + [G2b](t) + [G2c](t) + [G2d](t) \\ & + [G3e](t) + [G3f](t) \end{aligned}$$

Utilizamos la siguiente formulación aplicable a los Derechohabientes del Grupo (2) y del Grupo (3) exclusivamente.

$$\begin{aligned} [G\#\beta](t) = & Fp\#\beta * 13 * 1.1 * \overset{o}{e}_m * \{(d(y+t)/l(y)) * \{(l(z+t+1)/l(z)) * \\ & \overset{o}{a}^{(12)}(z+t+1) * Fac(z+t+1) + \{(d(y+t+\overset{o}{e}_m)/l(y)) * \{(l(z+t+1+\overset{o}{e}_m)/l(z)) * v^{\overset{o}{e}_m} * \\ & \overset{o}{a}^{(12)}(z+t+1+\overset{o}{e}_m) * Fac(y+t+1)\} \} \end{aligned}$$

se aplica a (2) y (3) de los Grupos(2) y (3)

β se aplica a los diversos Derechohabientes (a, b, c, d, e, f)

Por ejemplo (Fp2b) se refiere al derechohabiente (b) del Grupo (2), es decir, a la madre.

$$e_m^0 = \text{Mínimo}[e_{y+t+1}^0, e_{z+t+1}^0]$$

$$e_m^0 = \text{Esperanza de vida completa, de una persona con edad (m)}$$

$$\text{Fac}(z+t+1) = [e_{z+t+1}^0 / \{e_{z+t+1}^0 + e_{y+t+1}^0\}] * 1.1$$

$$\text{Fac}(y+t+1) = [1 - \text{Fac}(z+t+1)] * 1.1$$

Al comienzo de la expresión $[G\beta](t) = Fp\beta * 13 * \dots$ se incorporan las trece (13) mesadas por año de pensión.

Fp2a = 0.20 se refiere al padre

Fp2b = 0.20 se refiere a la madre

Fp2c = 0.10 se refiere al hermano inválido de menor edad

Fp2d = 0.10 se refiere al hermano no inválido de menor edad

Fp3e, Fp3f son libres y no deben totalizar más de cero punto sesenta (0.60)

A.3 GASTOS FUNERARIOS

La Ley de Pensiones N° 1732 de 1996 en su artículo 12, establece que “La prestación por gastos funerarios consiste en el pago por una sola vez de un mil cien Bolivianos (Bs 1100) con mantenimiento de valor respecto al dólar estadounidense, en favor de la persona que acredite haber efectuado el pago de los gastos funerarios del afiliado.”

Definimos ... $Vf(x)$ = Capital necesario para cubrir vitaliciamente la prestación de gastos funerarios a una persona de edad (x)

$$Vf(x) = \text{Monto del Gasto} * A(x)$$

El “Monto del Gasto” es el valor actualizado del monto de la prestación de acuerdo con lo establecido en la Ley de Pensiones.

$$A(x) = M(x)/D(x) \quad M(x) = \sum_{t=0}^{\infty} C(x+t) \quad C(x+t) = d(x+t) * v^{t+1}$$

$$D(x) = l(x) * v^x$$

Nota: En forma alternativa, la prima neta única se puede evaluar sin necesidad de las conmutaciones M, C y D, de la siguiente forma:

$$A_x = \sum_{t=0}^{w-x-1} {}_t p_x * q_{x+t} * v^{t+1}$$

B. CUANDO EL TITULAR DE LA PENSION ES UNO O VARIOS DERECHOHABIENTES

En la presente formulación, se asume en este caso (para realizar los cálculos) que el titular de la pensión es una persona con edad límite de 110 años.

Por otra parte, es indispensable referirse a la Pensión Básica. Se debe calcular la Pensión Básica de acuerdo con la clasificación de los Derechohabientes y las normas legales. Por ejemplo, si la madre es Derechohabiente titular de una pensión, la norma legal establece que es beneficiaria del 20% de la pensión Básica del causante. Es decir, la Pensión Básica en este caso es igual a la pensión de la madre Derechohabiente multiplicada por cinco ($5=1/0.20$).

Conocida la Pensión Básica, las Unidades Vitalicias calculadas según la presente formulación se refieren a la unidad de Pensión Básica del causante.

II. OTROS FACTORES SOBRE LAS RENTAS VITALICIAS

A. PERIODOS GARANTIZADOS

A partir del momento en que se define la pensión a que tiene derecho el pensionado de acuerdo con su capital acumulado, por efecto de la opción del periodo garantizado se debe proceder a descontar mensualmente de su cuenta individual el valor de la pensión pagada al titular y a sus Derechohabientes si fuera el caso. Al final del período se debe efectuar el cálculo de la pensión de acuerdo con el saldo de su cuenta.

Durante este período garantizado la renta no es variable y por lo tanto no está sujeta al resultado de la mortalidad.

B. SOBRE LOS PARAMETROS BÁSICOS DE LA FORMULACIÓN

1) La Tabla de mortalidad

El efecto de la Tabla de mortalidad es desde luego un aspecto que debe tenerse en cuenta con el fin de establecer directrices que garanticen la solvencia y el adecuado funcionamiento del sistema.

Debe utilizarse una Tabla elaborada para rentistas. Esta Tabla difiere de la Tabla para asegurados y de la Tabla para la población en general.

Se sugiere que una vez definida la Tabla de Rentistas, ésta se considere de obligatoria utilización. Las excepciones deben ser debidamente comprobadas mediante una evaluación actuarial.

2) La formulación.

Al ser tan compleja la formulación, ésta debe ser evaluada de acuerdo con los resultados que se obtengan para diversos escenarios posibles.

Se sugiere que a partir de los resultados obtenidos mediante la aplicación que se incorpora al presente estudio, se defina un rango no mayor del 15% de desviación como aceptable, para estudios alternativos presentados por empresas de la industria.

CONVENCIONES Y ANOTACIONES

1. Probabilidades derivadas de la Tabla de Mortalidad

Ejemplo del contenido de una Tabla de mortalidad:

EDAD x	$l(x)$	$d(x)$
50	94958	456
51	94502	501
52	94001	551
....

$l(x)$ se refiere a los sobrevivientes

$d(x)$ se refiere a las muertes

$$l(x+1) = l(x) - d(x)$$

$$l(x+2) = l(x+1) - d(x+1)$$

.....etc.

Con base en la información de la Tabla podemos obtener diversas probabilidades.

Probabilidad de sobrevivir un año, entre (x) y (x+1) = $l(x+1) / l(x)$

Probabilidad de sobrevivir dos años, entre (x) y (x+2) = $l(x+2) / l(x)$

Probabilidad de morir en un año, entre (x) y (x+1) = $d(x) / l(x)$

Probabilidad de sobrevivir un año, a la edad (x), y morir en el siguiente:

$$= \{l(x+1) / l(x)\} * \{d(x+1) / l(x+1)\}$$

2. Valor presente de rentas vitalicias

Definimos:

$a(x)$ = Valor presente de una renta vitalicia anual de un dólar a favor de una persona de edad (x)

$$a(x) = v * \{l(x+1) / l(x)\} + v^2 * \{l(x+2) / l(x)\} + v^3 * \{l(x+3) / l(x)\}$$

+.... etc. (hasta el final de la Tabla)

En esta fórmula:

x = Edad del titular de la renta vitalicia

v = $1/(1+i)$ i= Interés técnico anual

Definimos también:

$$a(x) = \sum_{t=1}^{\infty} v^t * l(x+t) / l(x)$$

La suma es hasta el final de la Tabla ($t=1, 2, 3, \dots$)

El siguiente es el caso de una renta inmediata:

$$\ddot{a}(x) = 1 + a(x)$$

$a(x|y)$ = Valor presente de una renta vitalicia anual de un dólar a favor de una persona de edad (y) a partir del momento del fallecimiento de una persona de edad (x)

Para efectuar este cálculo es necesario incluir las probabilidades correspondientes y efectuar el descuento financiero.

$$\begin{aligned} a(x|y) = & \{d(x) / l(x)\} * v * \{l(y+1) / l(y)\} * \ddot{a}(y+1) \\ & + \{l(x+1) / l(x)\} \{d(x+1) / l(x+1)\} * v^2 * \{l(y+2) / l(y)\} * \ddot{a}(y+2) \\ & + \{l(x+2) / l(x)\} \{d(x+2) / l(x+2)\} * v^3 * \{l(y+3) / l(y)\} * \ddot{a}(y+3) \\ & + \dots \end{aligned}$$

Lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$a(x|y) = \sum_{t=0}^{\infty} \{d(x+t) / l(x)\} * v^{t+1} * \{l(y+t+1) / l(y)\} * \ddot{a}(y+t+1)$$

Por otra parte:

$$a(x|y) = a(y) - a(xy)$$

$$a(xy) = \sum_{t=0}^{\infty} \{l_{(x+1)+1} / l(x)\} * \{l_{(y+t+1)} / l(y)\} * v^{t+1}$$

La siguiente expresión se refiere al valor presente de una renta vitalicia pagadera hasta que muera la última de dos personas de edades (x) e (y):

$$a(\bar{x}y) = a(x) + a(y) - a(xy) = a(x) + a(x|y)$$

3. Rentas temporales

$a(n)$ = Valor presente de una renta anual cierta durante (n) años

$$a(n) = v + v^2 + v^3 + \dots + v^n$$

$$\ddot{a}(n) = 1 + v + v^2 + v^3 + \dots + v^{n-1}$$

$$\ddot{a}(n) = (1 - v^n) / (1 - v)$$

También:

$\ddot{a}^{(12)}(n)$ = Renta cierta durante (n) años, **pagadera mensualmente**

$$\ddot{a}^{(12)}(n) = 1 + vm + vm^2 + vm^3 + \dots + vm^{n*12-1}$$

$$\ddot{a}^{(12)}(n) = (1 - vm^{n*12}) / (1 - vm)$$

$$vm = 1 / (1 + im)$$

$$(1 + im) = (1 + i)^{1/2}$$

i = Interés técnico anual

4. Aproximación al tiempo promedio de duración de una renta

La duración promedio de una renta vitalicia a favor de una persona de edad (x), es equivalente a su "esperanza de vida". Es decir, al promedio de años que se espera pueda vivir en el futuro.

A partir de una Tabla de mortalidad, la formulación de la esperanza de vida es la siguiente:

$$e_x = \sum_{t=0}^{\infty} t \cdot l(x+t) / l(x)$$

$$e_x^0 = e_x + 1/2$$

En el siguiente cuadro se muestran algunos resultados utilizando la Tabla Colombiana de Rentistas vigente.

Sexo masculino			Sexo femenino		
Edad	e_x^0		Edad	e_x^0	
30	47.2		30	48.8	
40	37.8		40	39.3	
50	28.7		50	30.2	
60	20.5		60	21.8	
70	13.7		70	14.6	
80	8.6		80	9.1	

Lo anterior significa que, por ejemplo, una persona de 60 años e edad, de sexo femenino tiene en promedio 21.8 años más de vida.

Si esta persona está recibiendo una pensión vitalicia, podemos decir que en promedio se pagarán 21.8 años más de pensión.

Dada la complejidad de los cálculos de probabilidades implícitos en el desarrollo de la formulación del valor presente del pasivo pensional de acuerdo con la ley 1732 de 29 de noviembre de 1996, sobre pensiones, simplificaremos las expresiones finales utilizando la aproximación a la cual estamos haciendo referencia en los casos en los cuales el efecto de las diferencias sea mínimo.

En el cuadro N° 1, ubicado al final del presente documento, se pueden observar las diferencias entre el cálculo que podemos llamar "exacto" y el cálculo "aproximado", para el sexo masculino. Utilizamos la Tabla Colombiana de Rentistas al 3.5 %

5. Fórmula general

En términos generales:

$$Vw(x) = 12 \cdot a^{12}(x) + \sum \{d(x+t) / l(x)\} \cdot v^{t+1} \cdot [\bar{a}(t)]$$

$Vw(x)$ = Valor presente de una renta vitalicia mensual de un dólar a favor de una persona de edad (x), y de las futuras prestaciones a favor de los Derechohabientes a partir de su fallecimiento.

$[\vec{a}(t)]$ = Valor presente de las futuras prestaciones a favor de los Derechohabientes, en el año (t) $\{t=0,1,2,3...\}$.

$12 * a^{(12)}(x)$ = Valor presente de una renta vitalicia mensual de un dólar a favor de una persona de edad (x).

Mediante el desarrollo de la fórmula de Woolhouse, se obtiene la siguiente expresión:

$$a^{(12)}(x) \cong a(x) + 11/24$$

FORMULACIÓN DE CASOS A MANERA DE EJEMPLOS EXPLICATIVOS

El desarrollo de las fórmulas lo observaremos mediante el desarrollo de casos.

Suponemos en los ejemplos, una renta anual de un dólar.

CASO (1)

EXISTE SOLAMENTE EL TITULAR (Sin Derechohabientes)

$\ddot{a}(x)$ = Valor presente de una renta anual vitalicia de un dólar (pagado al comienzo de cada año) a favor de una persona de edad (x)

$$\begin{aligned}\ddot{a}(x) = & 1 + \{l(x+1)/l(x)\}^* v \\ & + \{l(x+2)/l(x)\}^* v^2 \\ & + \{l(x+3)/l(x)\}^* v^3 \\ & + \dots \text{(hasta el final de la Tabla)}\end{aligned}$$

En este ejemplo, cada año se tiene en cuenta la probabilidad de que el titular sobreviva.

CASO (2)

SOLAMENTE EL TITULAR Y EL CÓNYUGE

El pasivo tiene dos componentes: el pasivo por concepto de la renta vitalicia a favor del titular (de edad (x) en este ejemplo) expresado en $\ddot{a}(x)$ y el pasivo que se genera a la muerte del titular, por concepto de la renta vitalicia a favor del cónyuge (de edad (y) en este ejemplo, y con derecho al 80% de la pensión del titular), expresado en $0.80 * \ddot{a}(x|y)$

$\ddot{a}(x)$ = Valor presente de una renta anual vitalicia de un dólar (pagado al comienzo de cada año) a favor del titular de edad (x)

$$\begin{aligned}\ddot{a}(x) = & 1 + \{l(x+1)/l(x)\}^* v + \{l(x+2)/l(x)\}^* v^2 \\ & + \{l(x+3)/l(x)\}^* v^3 + \dots \text{(hasta el final de la Tabla)}\end{aligned}$$

$\ddot{a}(x|y)$ = Valor presente de una renta anual vitalicia de un dólar (pagado al comienzo de cada año) a favor del cónyuge de edad (y) a partir del fallecimiento del titular de edad (x)

$$\begin{aligned}\ddot{a}(x|y) = & \ddot{a}(y) + \{l(x)/l(x)\}^* \{d(x)/l(x)\}^* \{l(y+1)/l(y)\}^* v^* \ddot{a}(y+1) \\ & + \{l(x+1)/l(x)\}^* \{d(x+1)/l(x+1)\}^* \{l(y+2)/l(y)\}^* v^2 * \ddot{a}(y+2) \\ & + \{l(x+2)/l(x)\}^* \{d(x+2)/l(x+2)\}^* \{l(y+3)/l(y)\}^* v^3 * \ddot{a}(y+3) \\ & + \{l(x+3)/l(x)\}^* \{d(x+3)/l(x+3)\}^* \{l(y+4)/l(y)\}^* v^4 * \ddot{a}(y+4) \\ & + \dots \text{(hasta el final de la Tabla)}\end{aligned}$$

Esta formulación incluye para cada año:

- a. La probabilidad de que (x) no haya fallecido al comienzo del año (t) y fallezca en ese año (t)

$$\{l(x+t)/l(x)\}^* \{d(x+t)/l(x+t)\} = \{d(x+t)/l(x)\}$$

- b. La probabilidad de que (y) no haya fallecido al final del año (t)

$$\{l(y+t+1) / l(y)\}$$

- c. El descuento financiero y el valor presente de la renta vitalicia a favor de (y) que se causa cuando fallece (x)

$$v^{t+1} * \ddot{a}(y+t+1)$$

FORMULACIÓN DEL CASO (2):

Valor presente = $\ddot{a}(x)$

$$+ \sum_{t=0}^{\infty} \{d(x+t) / l(x)\} * \{l(y+t+1) / l(y)\} * v^{t+1} * 0.80 * \ddot{a}(y+t+1)$$

CASO (3)

SOLAMENTE EL TITULAR, EL CÓNYUGE Y UN HIJO INVÁLIDO

El pasivo tiene dos componentes básicos: el pasivo por concepto de la renta vitalicia a favor del titular (de edad (x) en este ejemplo) y el pasivo que se genera a la muerte del titular, por concepto de la renta vitalicia a favor del cónyuge (de edad (y) en este ejemplo) y a favor del hijo inválido (de edad (z) en este ejemplo).

La pensión de los Derechohabientes (cónyuge e hijo) se distribuye de la siguiente forma:

El 80% si sobreviven los dos (cónyuge e hijo)

El 100% si sobrevive solamente el hijo.

El 80% si sobrevive solamente el cónyuge

FORMULACIÓN:

$$Valor\ presente = \ddot{a}(x) + \sum_{t=0}^{\infty} \{d(x+t) / l(x)\} * v^{t+1} * [\vec{a}(t)]$$

$[\vec{a}(t)]$ debe incluir tres (3) posibilidades en cada año (t):

- La probabilidad de que sobrevivan cónyuge e hijo.
- La probabilidad de que sobreviva solamente el hijo.
- La probabilidad de que sobreviva solamente el cónyuge.

$$[\vec{a}(t)] = \{l(y+t+1) / l(y)\} * \{l(z+t+1) / l(z)\} * \delta(y,z,t)$$

...Probabilidad de que los dos sobrevivan...

$$+ \{l(z+t+1) / l(z)\} * \{1 - l(y+t+1) / l(y)\} * \delta(z,t)$$

...Probabilidad de que sobreviva (z) y no sobreviva (y)...

$$+ \{l(y+t+1) / l(y)\} * \{1 - l(z+t+1) / l(z)\} * \delta(y,t)$$

...Probabilidad de que sobreviva (y) y no sobreviva (z)...

$$\delta(y,t) = 0.80 * \ddot{a}(y+t+1)$$

[Fallecido el titular y fallecido el hijo, el cónyuge tiene derecho a una renta vitalicia del 80% de la pensión del titular]

$$\delta(z,t) = 1.00 * \ddot{a}(z+t+1)$$

[Fallecido el titular y fallecido el cónyuge, el hijo inválido tiene derecho a una renta vitalicia del 100% de la pensión del titular]

En $\delta(yz,t)$ se incorpora un colectivo interdependiente de dos personas (cónyuge e hijo). Por lo tanto, en la formulación, para cada año (t) se debe incluir:

a)..... $0.80 * \ddot{a}(yz)+t+1)$

$\ddot{a}(yz)$ = Valor presente de una renta anual vitalicia de un dólar (pagado al comienzo de cada año) a favor del cónyuge de edad (y) y del hijo de edad (z), mientras los dos sobrevivan.

$$\begin{aligned} \ddot{a}(yz) = & 1 + \{I(y+1) / I(y)\} * \{I(z+1) / I(z)\} * v \\ & + \{I(y+2) / I(y)\} * \{I(z+2) / I(z)\} * v^2 \\ & + \{I(y+3) / I(y)\} * \{I(z+3) / I(z)\} * v^3 \\ & + \dots \text{(hasta el final de la Tabla)} \end{aligned}$$

b)..... $1.00 * \ddot{a}(y+t+1|z+t+1)$

$\ddot{a}(y|z)$ = Valor presente de una renta anual vitalicia de un dólar (pagado al comienzo de cada año) a favor del hijo de edad (z) a partir del fallecimiento del cónyuge de edad (y)

$$\ddot{a}(y|z) = \sum_{t=0}^{\infty} \{d(y+t) / I(y)\} * \{I(z+t+1) / I(z)\} * v^{t+1} * \ddot{a}(z+t+1)$$

c)..... $0.80 * \ddot{a}(z+t+1|y+t+1)$

$\ddot{a}(z|y)$ = Valor presente de una renta anual vitalicia de un dólar (pagado al comienzo de cada año (t+1)) a favor del cónyuge de edad (y) a partir del fallecimiento del hijo de edad (z)

FORMULACIÓN DEL CASO (3):

$$\text{Valor presente} = \ddot{a}(x) + \sum_{t=0}^{\infty} \{d(x+t) / I(x)\} * v^{t+1} * [\ddot{a}(t)]$$

$$\begin{aligned} [\ddot{a}(t)] = & \{I(y+t+1) / I(y)\} * \{I(z+t+1) / I(z)\} * \delta(yz,t) \\ & + \{I(z+t+1) / I(z)\} * \{1 - I(y+t+1) / I(y)\} * \delta(z,t) \\ & + \{I(y+t+1) / I(y)\} * \{1 - I(z+t+1) / I(z)\} * \delta(y,t) \end{aligned}$$

$$\delta(y,t) = 0.80 * \ddot{a}(y+t+1)$$

$$\delta(z,t) = 1.00 * \ddot{a}(z+t+1)$$

$$\delta(yz,t) = 0.80 * \ddot{a}(yz)+t+1) + 1.00 * \ddot{a}(y+t+1|z+t+1) + 0.80 * \ddot{a}(z+t+1|y+t+1)$$

CASO (4)

SOLAMENTE EL TITULAR, EL CONYUGE Y DOS HIJOS INVÁLIDOS

El pasivo tiene dos componentes básicos: el pasivo por concepto de la renta vitalicia a favor del titular (de edad (x) en este ejemplo) y el pasivo que se genera a la muerte del titular, por concepto de la renta vitalicia a favor del cónyuge (de edad (y) en este ejemplo) y a favor de los dos hijos inválidos (de edades (z1 y z2) en este ejemplo).

La pensión de los Derechohabientes (cónyuge e hijos) se distribuye de la siguiente forma:

El 100% si sobreviven todos (cónyuge e hijos)

El 80% si sobreviven solamente el cónyuge y un hijo.

El 100% si sobreviven solamente los dos hijos.

El 100% si sobrevive solamente un hijo.

El 80% si sobrevive solamente el cónyuge

FORMULACIÓN:

$$\text{Valor presente} = \ddot{a}(x) + \sum_{t=0}^{\infty} \{d(x+t) / l(x)\} * v^{t+1} * [\ddot{a}(t)]$$

$[\ddot{a}(t)]$ debe incluir siete (7) posibilidades en cada año (t) :

- La probabilidad de que sobrevivan todos (cónyuge e hijos).
- La probabilidad de que sobrevivan solamente el cónyuge y el hijo de edad (z1).
- La probabilidad de que sobrevivan solamente el cónyuge y el hijo de edad (z2).
- La probabilidad de que sobrevivan solamente los dos hijos.
- La probabilidad de que sobreviva solamente el hijo de edad (z1).
- La probabilidad de que sobreviva solamente el hijo de edad (z2).
- La probabilidad de que sobreviva solamente el cónyuge.

$$[\ddot{a}(t)] = \{l(y+t+1) / l(y)\} * \{l(z1+t+1) / l(z1)\} * \{l(z2+t+1) / l(z2)\} * \delta(a,t)$$

...Probabilidad de que todos sobrevivan...

$$+ \{l(y+t+1) / l(y)\} * \{l(z1+t+1) / l(z1)\} * \{1 - l(z2+t+1) / l(z2)\} * \delta(b,t)$$

...Probabilidad de que solamente sobrevivan (y) y (z1)...

$$+ \{l(y+t+1) / l(y)\} * \{l(z2+t+1) / l(z2)\} * \{1 - l(z1+t+1) / l(z1)\} * \delta(c,t)$$

...Probabilidad de que solamente sobrevivan (y) y (z2)...

$$+ \{l(z1+t+1) / l(z1)\} * \{l(z2+t+1) / l(z2)\} * \{1 - l(y+t+1) / l(y)\} * \delta(d,t)$$

...Probabilidad de que solamente sobrevivan (z1) y (z2)...

$$+ \{l(z1+t+1) / l(z1)\} * \{1 - l(z2+t+1) / l(z2)\} * \{1 - l(y+t+1) / l(y)\} * \delta(e,t)$$

...Probabilidad de que solamente sobreviva (z1)...

$$+ \{l(z2+t+1) / l(z2)\} * \{1 - l(z1+t+1) / l(z1)\} * \{1 - l(y+t+1) / l(y)\} * \delta(f,t)$$

...Probabilidad de que solamente sobreviva (z2)...

$$+ \{l(y+t+1) / l(y)\} * \{1 - l(z1+t+1) / l(z1)\} * \{1 - l(z2+t+1) / l(z2)\} * g(g,t)$$

...Probabilidad de que solamente sobreviva (y)...

$$\delta(g,t) = 0.80 * \ddot{a}(y+t+1)$$

[Fallecido el titular y fallecidos los hijos, el cónyuge tiene derecho a una renta vitalicia del 80% de la pensión del titular]

$$\delta(f,t) = 1.00 * \ddot{a}(z_2+t+1)$$

[Fallecido el titular, fallecido el cónyuge y el hijo (z1), el hijo inválido (z2) tiene derecho a una renta vitalicia del 100% de la pensión del titular]

$$\delta(e,t) = 1.00 * \ddot{a}(z_1+t+1)$$

[Fallecido el titular, fallecido el cónyuge y el hijo (z2), el hijo inválido (z1) tiene derecho a una renta vitalicia del 100% de la pensión del titular]

En $\delta(b,t)$, $\delta(c,t)$ y $\delta(d,t)$ se incorpora (en cada uno) un colectivo interdependiente de dos personas. Por lo tanto, en la formulación, para cada año (t) se debe incluir para cada colectivo:

a)..... $0.80 * \ddot{a}(yz)+t+1)$

$\ddot{a}(yz)+t+1$ = Valor presente de una renta anual vitalicia de un dólar (pagado al comienzo de cada año) a favor del colectivo de una persona de edad (y+t+1) y de otra de edad (z+t+1), mientras los dos sobrevivan.

$$\begin{aligned} \ddot{a}(yz)+t+1 &= 1 + \{I(y+t+1)/I(y+t)\} * \{I(z+t+1)/I(z+t)\} * v \\ &+ \{I(y+t+2)/I(y+t)\} * \{I(z+t+2)/I(z+t)\} * v^2 \\ &+ \{I(y+t+3)/I(y+t)\} * \{I(z+t+3)/I(z+t)\} * v^3 \\ &+ (\text{hasta el final de la Tabla}) \end{aligned}$$

b)..... $1.00 * \ddot{a}(y+t+1|z+t+1)$

$\ddot{a}(y+t+1|z+t+1)$ = Valor presente de una renta anual vitalicia de un dólar (pagado al comienzo de cada año (t+1)) a favor de una persona de edad (z+t+1) a partir del fallecimiento de otra de edad (y+t+1)

$$\ddot{a}(y+t+1|z+t+1) = +\sum_{t=0}^{\infty} \{d(y+t)/I(y)\} * \{I(z+t+1)/I(z)\} * v^{t+1} * \ddot{a}(z+t+1)$$

c)..... $0.80 * \ddot{a}(z+t+1|y+t+1)$

$\ddot{a}(z+t+1|y+t+1)$ = Valor presente de una renta anual vitalicia de un dólar (pagado al comienzo de cada año (t+1)) a favor de una persona de edad (y+t+1) a partir del fallecimiento de otra de edad (z+t+1)

En $\delta(a,t)$ se incorpora un colectivo interdependiente de tres personas. Por lo tanto, en la formulación, para cada año (t) se debe incluir para cada colectivo las diversas posibilidades siguiendo el procedimiento que se ha desarrollado en todos los casos anteriores.

La cantidad de combinaciones posibles hace necesario utilizar fórmulas de aproximación, si se tiene en cuenta que no se han evaluado las combinaciones posibles incorporando Derechohabientes del Grupo (2) {Padre, madre, hermanos} y del Grupo(3) {Libre con máximo del 60% de la pensión base}.

APROXIMACIONES BÁSICAS

- a. Para los Derechohabientes con derecho a una renta temporal (hijos no inválidos menores de edad), su renta se considera como “renta cierta”. Es decir, se supone una sobrevivencia del 100% durante el periodo de la renta.
- b. La mortalidad de personas menores de 15 años con derecho a renta vitalicia, se considera equivalente a la mortalidad de persona de 15 años.
- c. Para los Derechohabientes del Grupo(2) {Padre, madre y hermanos} y del Grupo(3) {libre} se asumió la siguiente aproximación:

$$a(y|z) = 13 * {}^0e_m * \left[\left\{ \frac{d(y+t)}{l(y)} \right\} * \left\{ \frac{l(z+t+1)}{l(z)} \right\} * {}^0\ddot{a}(z+t+1) * \text{Fac}(z+t+1) \right. \\ \left. + \left\{ \frac{d(y+e(m)-t)}{l(y)} \right\} * \left\{ \frac{l(z+t+1+e_m)}{l(z)} \right\} * V^{e_m} {}^0\ddot{a}(z+t+1+e_m) * \text{Fac}(y+t+1) \right]$$

$${}^0e_m = \text{Mínimo}[{}^0e_y + t + 1, {}^0e_z + t + 1]$$

0e_m = Esperanza de vida completa, de una persona con edad (m)

$$\text{Fac}(z+t+1) = [e_z + t + 1 / \{e_z + t + 1 + e_y + t + 1\}] * 1.1$$

$$\text{Fac}(y+t+1) = [1 - \text{Fac}(z+t+1)] * 1.1$$

Con el factor (13) se incorporan las trece (13) mesadas por año de pensión.

- d. En el cálculo del valor presente de las futuras rentas, para los Grupos(2) y (3) se utilizó la expresión ...

$$a(y|z) \cong 13 * {}^0e_m * \left[\left\{ \frac{d(y+t)}{l(y)} \right\} * \left\{ \frac{l(z+t+1)}{l(z)} \right\} * {}^0\ddot{a}(z+t+1) * \text{Fac}(z+t+1) \right. \\ \left. + \left\{ \frac{d(y+t+e_m)}{l(y)} \right\} * \left\{ \frac{l(z+t+1+e_m)}{l(z)} \right\} * v^{e(m)} {}^0\ddot{a}(z+t+1+e_m) * \text{Fac}(y+t+1) \right]$$

En esta expresión la edad (z) corresponde a la edad del Derechohabiente, y la edad (y) es la edad de la persona del Grupo anterior que en el momento del cálculo tiene una mayor esperanza de vida. Si no existen personas en el Grupo anterior se estima para (y) una esperanza de vida de un (1) año.